

Lycée Laymoun

2^{ème} BAC. Pro

Fonctions exponentielles.

M. YAZOUGH

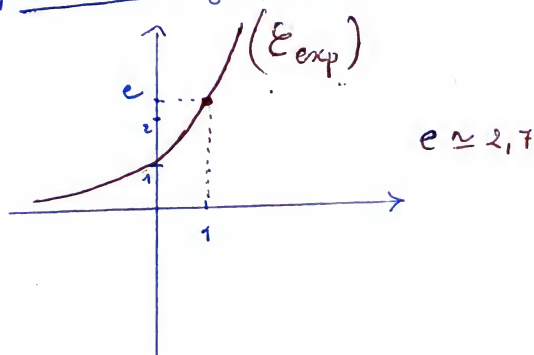
① fonction exponentielle népérienne:

Déf: • la fonction exponentielle népérienne, notée e^x (ou $\exp(x)$) est la fonction réciproque de la fonction: $x \mapsto \ln(x)$

• $x \mapsto e^x$ est définie et continue sur \mathbb{R}

② Propriétés élémentaires:

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $(\forall x \in \mathbb{R}), e^x > 0$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(e^x) = x$
- $\forall x > 0 \quad e^{\ln(x)} = x$

③ Représentation graphique:④ Propriétés et déductions:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x e^y$$

$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})$ on a:

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{rx} = (e^x)^r$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y) \quad \textcircled{1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \\ e^x > e^y \Leftrightarrow x > y \end{array} \right\}$$

EX:1 Résoudre dans \mathbb{R} les eq:

1°) $e^{2x-1} = e^{x+1}$

2°) $e^{x-1} = 3$

3°) $e^{x^2+x-2} = 1$

4°) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

5°) $e^{3x+1} = -2$

⑤ Domaine de définition:

si $f(x) = e^{u(x)}$ on a:

$$D_f = D_u = \{x \in \mathbb{R}; u(x) \in \mathbb{R}\}$$

EX:2 Donner le domaine de définition des fcts:

1°/ $f(x) = e^{\sqrt{x-2}}$

2°/ $g(x) = e^{\sqrt{\frac{1}{x}-3}}$

3°/ $h(x) = e^{x \ln(x^2-9)}$

⑥ Dérivabilités:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$$

• si u est dérivable sur I alors:

$$(\forall x \in I) \quad (e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$$

EX:3 Calculer la dérivée de f ds chaque cas:

1°/ $f(x) = e^{x^3-2x+1}$

2°/ $f(x) = e^{x \sin(x)}$

3°/ $f(x) = e^{\sqrt{x+4}}$

⑦ Limites essentielles :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$(\forall n \geq 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

EX : 4 Calculer les limites :

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$$

$$5^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x e^{-x}}$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{-x} - x)$$

$$6^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - e^x + 1)$$

$$4^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$$

⑧ Fonction exponentielle de base a . $a \in \mathbb{R}_+^* \neq 1$.

Déf : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

$$\text{et } \log_a(a^x) = x$$

propriétés :

$$\forall x \in]0, +\infty[: a^{\log_a(x)} = x$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad a^x = y \Leftrightarrow \log_a(y) = x$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall r \in \mathbb{Q} :$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^r = a^{rx} ; \quad \frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

②

$$\forall x > 0 : (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

EX : 5

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(e^x - 1)$$

1° Déterminer D_g .

2° Résoudre dans \mathbb{R} : $g(x) = 0$

3° calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

EX : 6 (EXAM. BAC. 2018)

$$f(x) = (e^x - 1)^2$$

1) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et donner une interprétation du résultat.

2) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

puis donner une interprétation du résultat.

→ on peut utiliser :

$$(e^x - 1)^2 = e^x(e^x - 2) + 1$$

3) Mq : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 2(e^x - 1)e^x$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f .

5) Déterminer l'abscisse du pt d'intersection de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = 1$
 $\ln(2) \approx 0,7$

EX : 7

$$g(x) = (x-1)e^x + x + 1$$

pour tout $x \in [0, +\infty[$

1) calculer $g'(x)$ et mq g est str \uparrow sur $[0, +\infty[$

2) Mq : $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$.

3) soit : $f(x) = \frac{x e^x}{(e^x - 1)^2} ; x \in \mathbb{R}^*$

3-a) Mq f est une fct impaire.

3-b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat.

3-c) Mq : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et interpréter...

4) Mq : $(\forall x > 0) f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} g(x)$